Péndulo físico-Momentos de inercia

David Cardona
Universidad Distrital Francisco José de Caldas-sede tecnológica.

Abstract
In the determinations of exercises related to the simple and physical pendulums, the common denominator is that the variable that is sought to develop is related to the period, the frequency, or in general the time of a revolution, but in the particular cases of the pendulums Physics that include even the geometry of the body, the essential data to be able to calculate these terms, depend on variable divests besides the length of the oscillating and the force of gravity to which the body is subjected.
In this report we hope to analyze the behavior of an object that oscillates around a particular exercise, describing a trajectory without much inclination (small angles).
Keywords (moments of inertia, approach, time, center of mass)

I. INTRODUCTION

EN las determinaciones de ejercicios relacionados con los péndulos simples y físicos, el común denominador es que la variable que se busque desarrollar este relacionada con el periodo, la frecuencia, o en general el tiempo de una revolución, pero en los casos particulares de los péndulos físicos que incluyen incluso la geometría del cuerpo, los datos esenciales para poder calcular estos términos, dependen de diversas variables además de la longitud del oscilante y la fuerza de gravedad a la cual se ve sometida el cuerpo.
En el presente informe se espera lograr analizar el comportamiento de un objeto que realiza oscilaciones alrededor de un eje particular, describiendo una trayectoria sin mucha inclinación (ángulos pequeños).

II. MARCO DE REFERENCIA

La teoría que sustenta el movimiento del péndulo físico, se compone de la sección de momentos de inercia de masa, en la cinemática plana de cuerpo rígido. El periodo de oscilación está relacionado con estos momentos de inercia y el vínculo entre el movimiento armónico simple y las oscilaciones para ángulos pequeños.

A. Teorema de Steiner.

"Para un objeto plano, el momento de inercia sobre un eje perpendicular al plano, es la suma de los momentos de inercia sobre dos ejes paralelos a través del punto de cruce entre el objeto y su plano perpendicular "[1]

$$Io = IG + md^{\wedge 2}$$

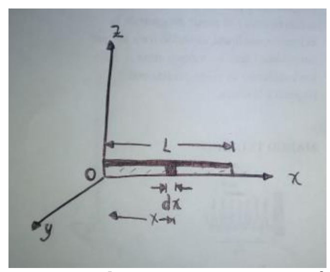
Donde:
Io=Momento de inercia respect a un punto aleatorio
IG= Momento de inercia que pasa por el centro de masa
m= masa del cuerpo
d=distancia perpendicular entre los ejes z y x

Expresado de otra forma .

$$IG = I - md^{\wedge 2} \text{ ecuacion (1)}$$

B. Momento de inercia para una varilla uniforme.

Bajo la definición del momento de inercial, en este caso respecto al punto O, se tiene:



Momento de inercia 1. Motaje . Definición de magnitudes para determinar el momento de inercia de la varilla.

$$Io = \sum mi * ri^{\wedge}2$$

Donde:
Io=Momento de inercia respect a el punto o
m=masa de la varilla.
r= distancia perpendicular entre el eje z y x
Teniendo en cuenta que la masa se puede expresar como una relación entre la densidad lineal(ρ "rho") y la longitud, la expresión queda representada como sigue.

$$Io = \int_0^L dm * x^{\wedge}2$$

$$Io = \int_0^L \rho * x^{\wedge}2 * dx$$

$$Io = \int_0^L \frac{M}{L} * x^{\wedge}2 * dx = \frac{1}{3} ML^2 \text{ ecuación (2)}$$

Relacionando la ecuación (1) y (2), se obtine el momento de inercia respecto al centro de lasa (IG)

$$IG = \frac{1}{12} M * L^2 \text{ ecuación (3) [2]}$$

Los datos que se obtienen en la ecuación (2) y (3), son los que se van a usar para determinar los periodos de oscilación en los montajes correspondientes.

C. *Error absoluto y relativo*

Es la desviación experimental del valor medido de una magnitude física respect al valor real de esa medición. Existen dos maneras de cuantificar el error de la medida

- Error absoluto:Corresponde a la diferencia entre el valor medido y el valor real.
- Error relativo:Corresponde al cociente

$$Eabs = fm - fr$$
$$Erel = \frac{fm - fr}{fr}$$

Donde:
fm=Valor medido
fr=Valor real
[3]

D. *Aproximación de ángulos pequeños.*

Para que el péndulo físico se pueda relacionar con el movimiento armónico simple se deben tener algunas pautas que precisan y hacen válida esta correspondencia.
Las funciones trigonométricas se pueden expresar en series de potencias, en este caso, una serie que disminuye conforme la variable lo haga,estas facilitan la aproximación de la función en casos especiales, así se tienen las siguientes aproximaciones.

$$\text{Para x pequeña } \sin x \approx x$$
$$\text{Para x pequeña } \cos x \approx 1$$
$$\text{Para x pequeña } \tan x \approx x \qquad [4]$$

III. MONTAJE

Teniendo en cuenta, las características de los objetos que se están analizando y su correspondiente base teórica ubicada en la sección II, se pueden singularizar los objetos bajo el principio del péndulo físico, teniendo así la siguiente base gráfica.

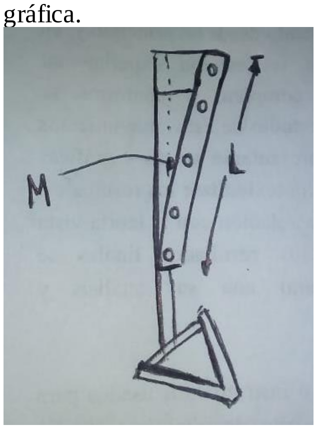


Fig. 1. Motaje 1.Elaboración propia. Péndulo físico, varilla (presuntamente uniforme), donde M es la masa de la varilla medida en gramos (no es despreciable) y L es la longitude medida en cm de la varilla

Del montaje 1 se debe determinar las distintas distancias que hay entre los orificios, la longitude total de la varilla y su masa. Gracias a estos datos, se podrá determinar el period que caracteriza al movimiento, teniendo en cuenta las oscilaciones para ángulos pequeños. De este primer montaje, se devira el de las longitudes de la varilla.

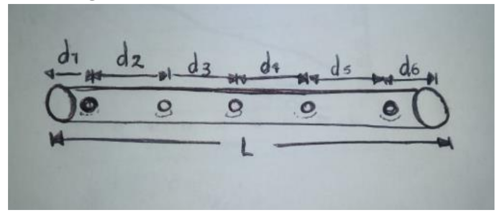


Fig. 2.Elaboración propia. Longitudes entre los orificios de la varilla

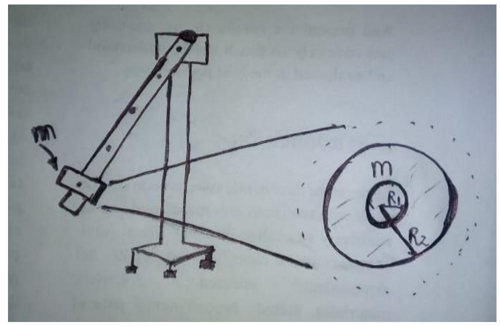


Fig. 3. Motaje 2.Elaboración propia. Péndulo físico, varilla y anillo presuntamente uniformes, donde m es la masa del anillo , R1 y R2 son los radios internos y externos de este respectivamente.

En el montaje 2, es necesario tomar medidas de cada dato que aparece en la imagen y además determinar la profundidad y diámetro del anillo.

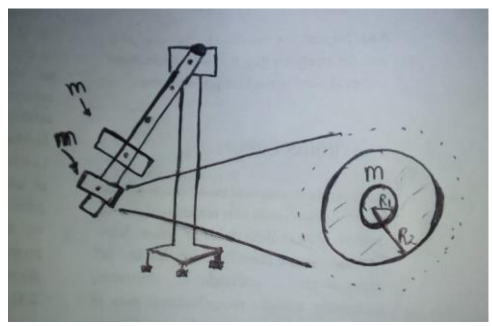


Fig. 4. Motaje 3.Elaboración propia. Péndulo físico, varilla y dos anillos presuntamente uniformes.

El ultimo montaje presenta un análisis en donde es necesario tener presente cada uno de los datos de cada objeto para describir correctamente el movimiento.

IV. ANÁLISIS.

En primer lugar, se determinará el periodo promedio que suministra del programa "Tracker", gracias al análisis de movimiento, tabla de datos y gráfica de acuerdo a la duración de cada video, para así lograr realizar una comparación con la base teórica.

A. *Video del montaje 1*

Los datos obtenidos en la práctica son:

TABLA I
VALORES OBTENIDOS EN LA PRÁCTICA.

d1=5mm
d2=45mm
d3=100mm
d4=100mm
d5=45mm
d6=nmm
M=49,2 KG

Se evaluaron los periodos en una duración de 5,34 seg aproximadamente, basados en la table de datos que suministra el programa se realizó la siguiente gráfica.

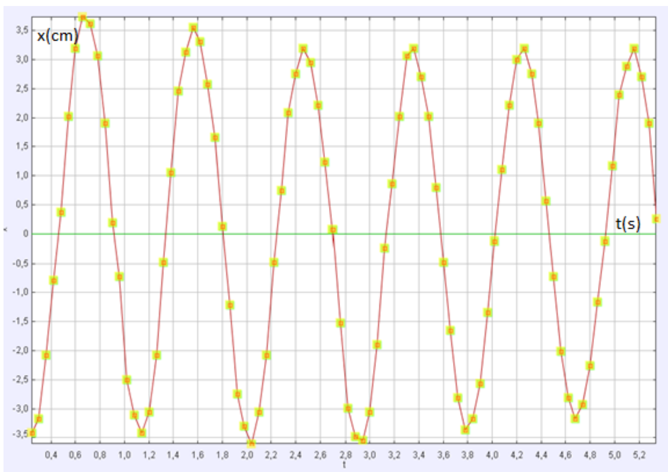


Fig. 5. Evaluación montaje 1.Oscilación del péndulo físico descrito por la varilla en sujeta en la posición d5

Teniendo en cuenta que "L" mide 30 cm (0.3m) y M es 49.2 gramos (0.049Kg) medidos en la práctica, se puede hacer uso de la expresión de la ecuación (2) y (3) para calcular el periodo teóricamente usando.

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{IG+mh^2}}{\sqrt{mgL}} \text{ Ecuación (4)}$$

Donde :

T= periodo de oscilación
IG= Momento de inercia respecto al Centro de masa
M=masa del objeto
h= distancia desde el centro de masa al punto de giro "O"

$$h = \frac{L}{2}$$

Reemplazando los valores de la ecuacion (2) se obtiene.

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{1}{12}mL^2 * +mh^2}}{\sqrt{mgh}}$$

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{1}{12}0.0492Kg * (0.3m)^2 + 0.0492Kg * (0.15m)^2}}{\sqrt{0.0492Kg * 9.807\frac{m}{s^2} * 0.15m}}$$

$T \approx 0.897\ s$ Resultado teórico

Efectuando las operaciones matemáticas se obtiene que el periodo es igual a 0.897 segundos aproximadamente .

Periodo a partir de la gráfica:

El periodo promedio de la oscilación a partir del análisis gráfico, se obtiene al tomar los en segundos que le toma a la varilla ir desde un mínimo a uno máximo y regresar al mismo punto, así:

TABLA II
PERIODO DE OSCILACIÓN DE LA VARILLA

Periodo	segundos	segundos
T1	1,14-0,24	0,9
T2	2,04-1,14	0,9
T3	2,94-2,04	0,9
T4	3,78-2,94	0,84
T5	4,69-3,78	0,9
	Sumatoria	4,44
	Promedio	0,888

Teniendo en cuenta el resultado teórico del procedimiento anterior,el de la práctica mostrado en la tabla I y usando las ecuaciones de la sección C del marco de referencia, tenemos que el error absoluto es.

$$Eabs = fm - fr$$

$$Eabs = |0.88 - 0.897|$$

$$Eabs = 0.017 \text{ s}$$

$$Erel = \frac{fm - fr}{fr}$$

$$Erel = \left|\frac{0.88 - 0.897}{0.897}\right|$$

$$Erel = 0.189 \ \%$$

Basado en cada uno de los determinantes como el valor absolute, relative y la similitude que hay entre las mediciones teóricas y practices, se puede señalar que el análisis y toma de datos fueron los correctos.

Ahora bien, si lo que se quiera hallar el el momento de inercia resprespecto a un punto aleatorio, teniendo en cuenta que ya se tiene el valor del period, se debe expresar la ecuación (4) de la siguiente manera. Valor teórico

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{Io}}{\sqrt{mgL}}$$

$$Io = \frac{T^2}{(2\pi)^2} * mgL \quad \text{ecuación (5)}$$

Reemplazando los datos que ya se conocer se obtiene:

$$Io = \frac{(0.897s)^2}{(2\pi)^2} * 0.0492Kg * 9.807\frac{m}{s^2} * 0.3m$$

$$Io = (2.95017 * 10\ )N * m$$

Para el momento de inercia respecto al centro de masa se usa la ecuación (4) también, pero en términos de IG

$$IG = \frac{T^2 * m * g * L}{(2\pi)^2} - mh^2$$

$$IG = \frac{(0.897s)^2 * 0.0492kg * 9.807 * 0.3m}{(2\pi)^2} - 0.0492 * 0.15^2$$

$$IG = (1.84317 * 10^{-3})N * m$$

Valor experimental:

Usando la ecuación (5) y reemplazando los datos hallados en la práctica se obtiene:

$$Io = \frac{(0.88s)^2}{(2\pi)^2} * 0.0492Kg * 9.807\frac{m}{s^2} * 0.3m$$

$$Io = (2.8394 * 10^{-3})N * m$$

Usando la ecuación (4) en términos de IG se obtiene:

$$IG = \frac{(0.888s)^2 * 0.0492kg * 9.807 * 0.3m}{(2\pi)^2} - 0.0492 * 0.15^2$$

$$IG = (1.7324 * 10^{-3})N * m$$

B. Video del montaje 1, posición de la varilla en d4.

Se evaluaron los periodos en una duración de 4.0541 seg aproximadamente, basados en la tabla de datos que suministra el programa se realizó la siguiente gráfica.

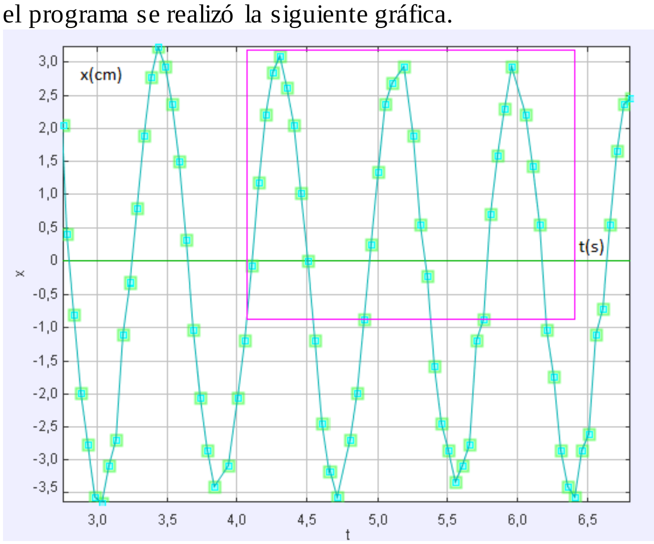


Fig. 6. Evaluación montaje 1.Oscilación del péndulo físico descrito por la varilla en sujeta en la posición d4

Usando las mismas medidas que en la gráfica anterior, es decir, L=0.3m , M=0.0492 kg, se puede hacer uso nuevamente la ecuación (2) y (3) para obtener el valor teórico del periodo, teniendo en cuenta que ahpra, la distancia que se denomina “h” va a disminuir.

$$T = 2\pi\frac{\sqrt{IG + mh^2}}{\sqrt{mgL}}$$

T= periodo de oscilación

IG= Momento de inercia respecto al Centro de masa

M=masa del objeto

h= distancia desde el centro de masa al punto de giro “O”

$$h = d4$$

h=100mm=0.1m

Reemplazando los valores de la ecuación (2) se obtiene:

$$T = 2\pi\frac{\sqrt{\frac{1}{12}0.0492Kg * (0.3m)^2 + 0.0492Kg * (0.1m)^2}}{\sqrt{0.0492Kg * 9.807\frac{m}{s^2} * 0.1m}}$$

$T \approx 0.8393\ s$ Resultado teórico

Realizando las operaciones matemáticas se obtiene que el periodo es aproximadamente igual a 0.8393 segundos

Periodo apartir de la gráfica.

El periodo de oscilación se puede definer a partir de la gráfica y los datos que ella suministra, teniendo en cuenta los máximos de la función y determinando el tiempo transcurido en estos periodos.

TABLA III
PERIODO DE OSCILACIÓN DE LA VARILLA POSICINADA DESDE D5

Periodo	segundos	segundos
T1	3,847-3,036	0,801
T2	4,704-3,847	0,857
T3	5,555-4,7047	0,851
T4	6,4064-5,555	0,851
	Sumatoria	3,36
	Promedio	0,84

Para el error absolute se tiene:

$$Eabs = fm - fr$$

$$Eabs = |0.84 - 0.8393|$$

$$Eabs = 0.0007\ s$$

$$Erel = \frac{fm - fr}{fr}$$

$$Erel = \frac{0.84 - 0.8393}{0.8393}$$

$$Erel = 0.834 * 10^{-3}\ \%$$

Momento de inercia respecto a un punto aleatorio,valor teórico

Usando la ecuación (5) se obtine.

$$Io = \frac{T^2}{(2\pi)^2} * mgL$$

$$Io = \frac{(0.839s)^2}{(2\pi)^2} * 0.0492Kg * 9.807\frac{m}{s^2} * 0.3m$$

$$Io = (2.58099 * 10^{-3})N * m$$

Usando la ecuación (4) en términos de IG se obtiene:

$$IG = \frac{T^2 * m * g * L}{(2\pi)^2} - mh^2$$

$$IG = \frac{(0.839s)^2 * 0.0492kg * 9.807 * 0.3m}{(2\pi)^2} - 0.0492 * 0.1^2$$

$$IG = (2.08899 * 10^{-3})N * m$$

Momento de inercia respecto a un punto aleatorio,valor práctico.

Usando la ecuación (5) se obtiene:

$$Io = \frac{(0.84s)^2}{(2\pi)^2} * 0.0492Kg * 9.807\frac{m}{s^2} * 0.3m$$

$$Io = (2.58715 * 10^{-3})N * m$$

Usando la ecuación (4) en términos de IG se obtiene:

$$IG = \frac{(0.84s)^2 * 0.0492kg * 9.807 * 0.3m}{(2\pi)^2} - 0.0492 * 0.1^2$$

$$IG = (2.09515 * 10^{-3})N * m$$

C. Video del montaje 1, posición de la varilla en d3.

Para este caso en particular, al hacer el montaje fue necesario fijar los objetivos en cómo se iba a comportar la varilla, porque desde un principio se pretendió asumir que era una varilla uniforme, y por lo tanto su centro de masa estaría en el centro, pero no se tenian las herramientas para comprobarlo, sin embargo, cuando se realizó este montaje, la varilla no cambió su posición a pesar de que se vió sometida a áungulos mayores que están fuera de la aproximación, por ende, se puede concluir que en realized su centro de masa se encuentra en el centro, porque precisa equilibrio en la varilla.

D. Video Montaje 2

En el montaje 2, se debe tener en cuenta que el momento de inercia de un aro o anillo grueso viene dado por la expresión.

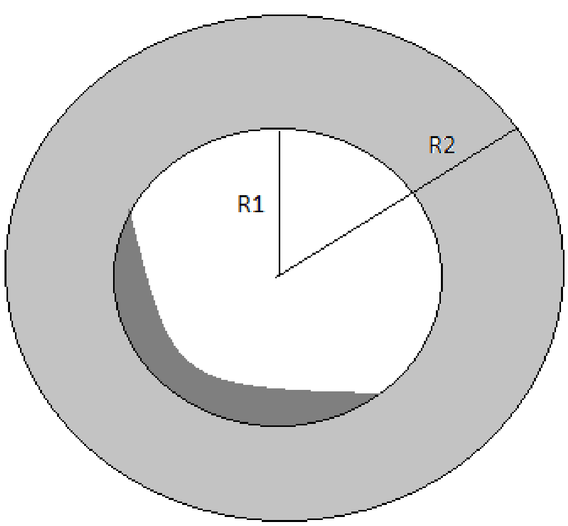


Fig. 7. Aro uniforme. Elaboración propia, diagrama gráfico para momentos de inercia.

$$IG = \frac{1}{2}M(R1^2 + R2^2)$$

En el caso que compete el presente laboratorio, R1 y R2 tienen valores fijos de 1.4 cm y 3 cm respectivamente y masa de 51.4g

Es importante tener cuidado con la forma de utilizer los datos en esta sección del procedimiento, porque las distancias al ser tan pequeñas puede que no afecten mucho, pero habría incongruencias en las mediciones practices de las teóricas.

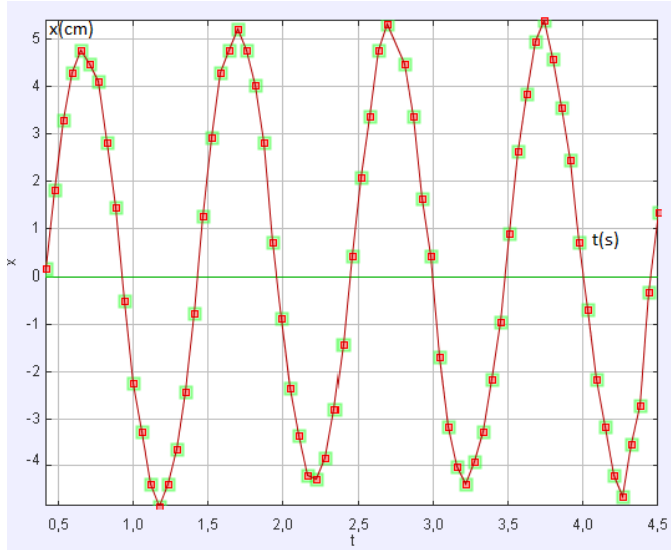


Fig. 8. Evaluación montaje 2.Oscilación del péndulo con una masa extra proporcionada por un aro uniforme .

Las ecuaciones anteriores son igual de válidas, sin embargo, dentro de sus términos se debe incluir los momentos de inercia de cada objeto, así como la masa total de ellos para el análisis. De la ecuación (4) se obtiene

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{(Io)\,anillo + (Io)\,varilla}}{\sqrt{(m)total * gL}}$$

Donde:

$$(Io)\,anillo = IG + m(anillo)h^2$$

$$(Io)\,anillo = \frac{1}{2}m(R1^2 + R^2) + m(anillo)h^2$$

$$(Io)\,varilla = IG + m(varilla)h^2$$

$$(Io)varilla = \frac{1}{12}mL^2 + m(varilla)h^2$$

Usando las expresiones de (Io)varilla y (Io)anillo se encuentra del period.

$$T \approx 1.0223s$$

Aplicando el método gráfico se obtine el periodo como sigue.

TABLA III

PERIODO DE OSCILACIÓN DE LA VARILLA Y EL ARO

Periodo	segundos	segundos
T1	2,69268-1,6975	0,99518
T2	3,746341-2,69268	1,053661
T3	1,63902-0,643902	0,995118
	Sumatoria	3,043959
T promedio	Promedio	1,014653

$$Eabs = |1.0146 - 1.0223|$$
$$Eabs = 0.0077 \text{ s}$$
$$Erel = \frac{1.0146 - 1.0223}{1.0223}$$
$$Erel = 7.532 * 10^{-3}\%$$

Las mediciones presentan valores muy cercanos, con un porcentaje de error bastante bajo.
Momento de inercia para todo el Sistema:
Usando la ecuación (5), y teniendo
en cuenta que en la masa se debe evaluar toda la que se se encuentra en el Sistema, se puede hallar el valor teórico y práctico, teniendo en cuenta los periodos que ya se han encontrado.
Valor teórico:

$$Io = \frac{T^2}{(2\pi)^2} * mgL$$
$$Io = (6.5293 * 10^{-3})N * m$$

Valor práctico:

$$Io = (6.43137 * 10^{-3})N * m$$

Momento de inercia del aro utilizando el periodo del sistema y conociendo la tendencia al giro de la varilla.
De la variación de la ecuación (4) presentada en el momento D del desarrollo , se puede despejar el momento de inercia del aro respecto a los demás datos.
Factor teórico:

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{(Io)anillo + (Io)varilla}}{\sqrt{(m)total * gL}}$$
$$(Io)anillo = \frac{T^2 * (m)total * g * L}{(2\pi)^2} - (Io)varilla$$
$$(Io)anillo = 1.91687 * 10^{-3}$$
$$(IG)anillo = (Io)anillo - mh^2$$
$$(IG)anillo = (7.6037 * 10^{-4})N * m$$

E. Video2 del montaje 2

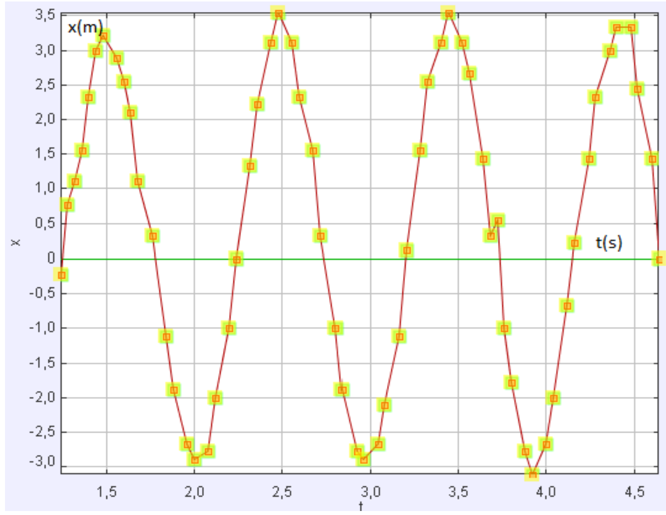


Fig. 8. Evaluación montaje 2.Oscilación del péndulo con una masa extra proporcionada por un aro uniforme .en la posición de d2.

Desarrollando las ecuaciones que se usaron en la fig 8, la única variable es que lavariable L, ya no vale 25 cm sino que como se ha desplazado el punto de apoyo para el giro, esta vale ahora 20 cm.

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{(Io)\,anillo + (Io)\,varilla}}{\sqrt{(m)total * g\,(L - 5mm)}}$$

$$T \approx 0.98s$$

Método gráfico:

TABLA IV
PERIODO DE OSCILACIÓN DE LA VARILLA Y EL ARO EN POSICIÓN D2

Periodo	segundos	segundos
T1	2,96-2	0,96
T2	3,92-2,96	0,96
T3	3,44-2,48	0,96
	Sumatoria	2,88
	Promedio	0,96

F. Video3 del montaje 2

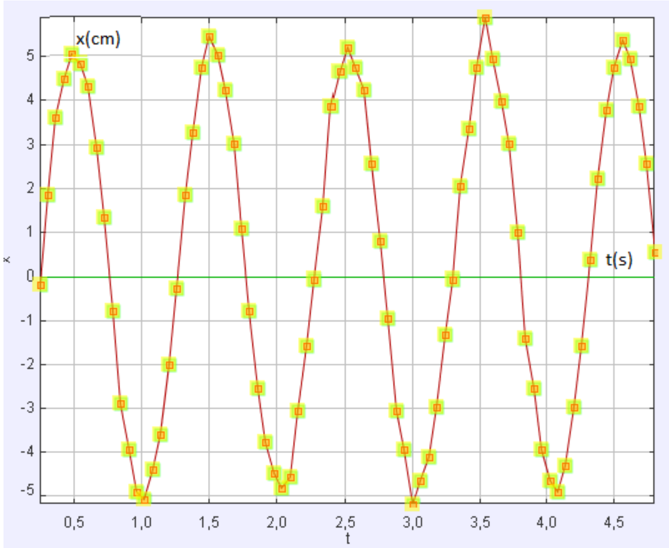


Fig. 9. Evaluación montaje 2.Oscilación del péndulo con tres masas interactuando entre si, dos de un anillo uniforme y la varilla.

Para calcular el period en este ítem se debe tener en cuenta la misma condición que en el punto D y E, es decir, se deben considerer todas las masas que interactuan en el sistema, al igual que los momentos de inercia característicos.

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{(Io)anillo1 + (Io)varilla + (Io)anillo2}}{\sqrt{(m)total * gL}}$$

$$T = 1.52s$$

Método gráfico:

TABLA V

PERIODO DE OSCILACIÓN DE LA VARILLA Y DOS ANILLOS BAJO EL MISMO SISTEMA.

Periodo	segundos	segundos
T1	1,5-0,48	1,02
T2	1,56-0,48	1,08
T3	2,52-1,56	0,96
T4	3,54-2,52	1,02
	Sumatoria	4,08
	Promedio	1,02

Nota:En este caso, sí se debe señalar que las mediciones no fueron para nada acertadas, el análisis más razonable es entender que como todos los momentos de inercia están inmersos en los cáalculos, no se puede generalizer ningún término.

V. CONCLUSIONES

Los análisis de datos que requieren la administración de estos, en cada punto de su estructura, requieren un cuidado especial en su desarrollo, porque si se ingresa un dato que no es el correcto a razón de la falta de contextualización, la base teórica flaqueará y se perderá la estructura del análisis.
En relación a la parte teórica, pude observer que en el péndulo físico de oscilaciones pequeñas, que permitan hacer la aproximación, la masa del objeto es despreciable siempre y cuando éste tenga una geometría exacta, es decir, su centro de masa debe estar ubicado en el centro geomético de la figura.Sin embargo, cuando el periodo depende de los momentos de inercia de varios cuerpos, la simplificación señala que sí depende de la masa de los cuerpos, porque interactúan sus fuerzas de gravedad entre sí.
El movimiento armónico simple característico de los péndulos simples puede sustentar su base argumental, bajo la premisa del péndulo físico en oscilaciones pequeñas y viceversa

REFERENCIAS

[1] Wikipedia.”Teorema de Steiner”, definición momentos de inercia. Editado el 10 de Abril de 2018
[2] Hibbeler,Russell C “Ingeniería mecánica” decimosegunda edición, caítulo 17, “cinemática plana de un cuerpo rígido” pag 395-401
[3] Wikipedia.”Error experimental”, errores absolutos y relativos. Editado el 26 de abril de 2018
[4] M. Olmo. Nave” Series de funciones trigonométricas” ,”aplicaciones de las series trigonométricas” Hyperphysics
[5] Licenciado Cesar Antonio Cesar “momentos de inercia de una varilla”,, problema del péndulo físico, disponible en : https://www.youtube.com/watch?v=x9kc2nZFD4k